

Concurs de Admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2016
Subiect la Matematică

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3 \\ x + my + m^2z = 3, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{R}$ este un parametru real oarecare.

- Calculați determinantul matricei coeficienților necunoscutelor sistemului de mai sus.
- Rezolvați sistemul pentru $m = -1$.
- Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{dacă } |x| \geq 1, \\ e - e^{x^2} & , \text{dacă } |x| < 1. \end{cases}$$

- Să se determine mulțimea punctelor în care f este continuă.
- Să se determine mulțimea punctelor în care f este derivabilă.
- Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = xe^x + 1.$$

- Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ admite exact două soluții reale și distincte.
- Arătați că f admite primitive și orice primitivă a lui f este strict creștătoare.
- Calculați

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

4. Pe mulțimea $A = (-1, 1)$ considerăm operația $*$ definită prin

$$x * y = \frac{x + y}{xy + 1}, \text{ pentru orice } x, y \in A.$$

- Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ definită prin

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

este un izomorfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(A, *)$.

- Arătați că $(A, *)$ este un grup comutativ.
- Arătați că pentru orice $m \in A$ ecuația $x * x = m$ are o unică soluție $x \in A$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu note cuprinse între 1 și 10.

Timp de lucru: 3 ore.

Concurs de Admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2016
Soluții și barem de corectare la Matematică

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3 \\ x + my + m^2z = 3, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{R}$ este un parametru real oarecare.

a) Calculați determinantul matricei coeficienților necunoscutelor sistemului de mai sus.

b) Rezolvați sistemul pentru $m = -1$.

c) Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil.

Soluție:

start **1p**

a) Matricea A a coeficienților necunoscutelor sistemului dat este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & m^2 \end{pmatrix}.$$

Calculând determinantul (cu definiția, sau cu regula lui Sarrus, sau cu regula triunghiului, sau dezvoltând după una dintre liniile sau coloanele matricei), se obține $\det(A) = -m^3 + 2m^2 - m$ **3p**

b) Pentru $m = -1$ avem că $\Delta = \det(A) = 4 \neq 0$, astfel că se poate folosi regula lui Cramer. Avem:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12,$$

astfel că $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3$ **3p**

c) Conform a) avem că $\det(A) = -m(m-1)^2$. Notând cu $\bar{A}$ matricea extinsă a sistemului, pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ avem că $\det(A) \neq 0$, astfel că $3 = \text{rang}(A) \leq \text{rang}(\bar{A}) \leq 3$, și rezultă că $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3$ și sistemul este compatibil determinat..... **1p**

Pentru $m = 0$, avem $\det(A) = 0$ și cum $m_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, iar

$$m_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

rezultă, conform criteriului lui Rouché, că sistemul este incompatibil. **1p**

Pentru $m = 1$, A și $\bar{A}$ sunt matrice nenule având cele trei linii identice, astfel că $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 1$ și sistemul este compatibil (se poate și observa direct că $x = y = z = 1$ este în acest caz o soluție a sistemului). Prin urmare, sistemul este compatibil dacă și numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **1p**

□

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{dacă } |x| \geq 1, \\ e - e^{x^2} & , \text{dacă } |x| < 1. \end{cases}$$

- a) Să se determine mulțimea punctelor în care f este continuă.
 b) Să se determine mulțimea punctelor în care f este derivabilă.
 c) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

Soluție:

start **1p**

Explicitând, avem că

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \\ h(x) & , \text{dacă } x \in (-1, 1), \end{cases}$$

unde $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcțiile definite prin $g(x) = x^2 - 1$, respectiv $h(x) = e - e^{x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Funcțiile g și h sunt elementare, fiind compuse de funcții elementare. Prin urmare, ele sunt continue și derivabile pe orice interval deschis $I \subseteq \mathbb{R}$.

a) Avem atunci că f este continuă pe mulțimea $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ **1p**

În punctul $x = -1$ avem că:

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = f(-1) = 0,$$

astfel că f este continuă în $x = -1$ **1p**

Analog, în $x = 1$:

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 0,$$

deci f este continuă în $x = 1$. Rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ **1p**

b) Ca mai sus, f este derivabilă pe mulțimea $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, și $f'(x) = g'(x) = 2x, \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, respectiv $f'(x) = h'(x) = -2xe^{x^2}, \forall x \in (-1, 1)$ **1p**

În $x = -1$ avem

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \nearrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2,$$

respectiv

$$\lim_{x \searrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \searrow -1} \frac{e - e^{x^2}}{x + 1} = -e \cdot \lim_{x \searrow -1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -e \cdot 1 \cdot (-2) = 2e.$$

Deoarece $f'_s(-1) \neq f'_d(-1)$, funcția f nu este derivabilă în $x = -1$ **1p**

Analog se arată că $f'_s(1) = -2e \neq 2 = f'_d(1)$ și f nu este derivabilă în $x = 1$. Prin urmare, f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ **1p**

(Alternativ se poate folosi consecința teoremei lui Lagrange: Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și există limitele laterale în $x = -1$ și $x = 1$ ale derivatei lui f , astfel că există derivatele laterale:

$$f'_s(-1) = \lim_{x \nearrow -1} f'(x) = \lim_{x \nearrow -1} 2x = -2, \quad f'_d(-1) = \lim_{x \searrow -1} f'(x) = \lim_{x \searrow -1} -2xe^{x^2} = 2e,$$

$$f'_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} -2xe^{x^2} = -2e, \quad f'_d(1) = \lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} 2x = 2,$$

și funcția f nu este derivabilă în $x = -1$ și $x = 1$.)

c) Deoarece

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = 2x & , \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \\ h'(x) = -2xe^{x^2} & , \text{dacă } x \in (-1, 1), \end{cases}$$

avem că $f'(x) > 0$ dacă și numai dacă $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, respectiv $f'(x) < 0$ dacă și numai dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe intervalele $[-1, 0]$ și $[1, \infty)$, respectiv strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$ și $[0, 1]$ **2p**

Rezultă că f are următoarele puncte de extrem local: $x = -1$ și $x = 1$ sunt puncte de minim local, iar $x = 0$ este punct de maxim local. **1p**

(Observație: Extremele $x = -1$ și $x = 1$ nu pot fi obținute prin condiția de anulare a derivatei, deoarece funcția f nu este derivabilă în aceste puncte.)

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = xe^x + 1.$$

- a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ admite exact două soluții reale și distincte.
c) Arătați că f admite primitive și orice primitivă a lui f este strict crescătoare.
d) Calculați

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Soluție:

start **1p**
a) Fiind compunere de funcții elementare, f este elementară, și deci continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$. De asemenea, $f'(x) = (x+1)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **1p**
Cum $f'(x) > 0$ dacă și numai dacă $x > -1$, respectiv $f'(x) < 0$ dacă și numai dacă $x < -1$, rezultă că f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, \infty)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$ **2p**
b) Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, ținând cont de monotonia funcției avem că

$$f((-\infty, -1)) = (f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right),$$

respectiv

$$f((-1, \infty)) = (f(-1), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) = \left(1 - \frac{1}{e}, \infty\right).$$

Prin urmare, ecuația $f(x) = m$ are două soluții pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă ecuația are câte o soluție în fiecare dintre intervalele $(-\infty, -1)$ și $(-1, \infty)$, adică pentru

$$m \in f((-\infty, -1)) \cap f((-1, \infty)) = \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right) \cap \left(1 - \frac{1}{e}, \infty\right) = \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right).$$

Prin urmare, ecuația $f(x) = m$ are două soluții pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ **2p**
(Alternativ se poate urmări tabloul de variație al funcției f :

x	$-\infty \qquad \qquad \qquad -1 \qquad \$						
-----	--	--	--	--	--	--	--

din inspectarea căruia se poate trage concluzia.)

(Alta posibilitate este de a folosi șirul lui Rolle pentru funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = f(x) - m$. Avem că $g'(x) = f'(x) = (x+1)e^x$ se anulează doar în -1 și numărul soluțiilor ecuației $g(x) = 0$ este dat de numărul schimbărilor de semn în șirul $(g(-\infty) = 1 - m, g(-1) = 1 - \frac{1}{e} - m, g(\infty) = \infty)$. Ecuația are două soluții dacă și numai dacă $1 - m > 0 > 1 - \frac{1}{e} - m$, sau $m \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$.)

c) Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ **1p**

Fie F o primitivă a funcției f . Atunci $F'(x) = f(x) \geq f(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, astfel că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ **1p**

d) Integrând prin părți, avem

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (xe^x + 1) dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 1 dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx + 1 = e - (e - 1) + 1 = 2.$$

Astfel, $\int_0^1 f(x) dx = 2$ **2p**

(Alternativ, $f(x) = xe^x + 1 = (x+1)e^x - e^x + 1 = (f(x) - e^x + x)'$ și

$$\int_0^1 f(x) dx = (f(x) - e^x + x)|_0^1 = f(1) - e + 1 - f(0) + 1 - 1 = e + 1 - e + 1 = 2.)$$

4. Pe mulțimea $A = (-1, 1)$ considerăm operația $*$ definită prin

$$x * y = \frac{x+y}{xy+1}, \text{ pentru orice } x, y \in A.$$

a) Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ definită prin

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

- este un izomorfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(A, *)$.
 b) Arătați că $(A, *)$ este un grup comutativ.
 c) Arătați că pentru orice $m \in A$ ecuația $x * x = m$ are o unică soluție $x \in A$.

Soluție:

start **1p**

a) Ecuația $f(x) = y$ este echivalentă cu $e^{2x} = \frac{1-y}{1+y}$, care are pentru orice $y \in (-1, 1)$ soluția unică $x = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1-y}{1+y} \right)$.

Rezultă că funcția f este bijectivă, cu inversa $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1-y}{1+y} \right)$ **2p**

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc

$$f(x) * f(y) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) \cdot f(y) + 1} = \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2x} + 1)(e^{2y} - 1)}{(e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1) + (e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1)} = \frac{e^{2(x+y)} - 1}{e^{2(x+y)} + 1} = f(x + y),$$

astfel că f este morfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(A, *)$. Rezultă că f este un morfism bijectiv, deci un izomorfism..... **2p**

b) Deoarece $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (A, *)$ este un izomorfism, iar $(\mathbb{R}, +)$ este un grup comutativ, rezultă că $(A, *)$ este un grup comutativ..... **2p**

c) Ecuația $x * x = m$ se transcrie sub forma $\frac{2x}{x^2+1} = m$. Dacă $m = 0$, singura soluție a ecuației este $x = 0$. Pentru $m \in A \setminus \{0\}$ ecuația este echivalentă cu $mx^2 - 2x + m = 0$. Discriminantul acestei ecuații de grad doi este $\Delta = 4(1 - m^2) > 0$ pentru orice $m \in A$. Rezultă că ecuația are două soluții reale distincte x_1, x_2 , al căror produs este $x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1$, astfel că exact una dintre ele este de modul subunitar. Rezultă că ecuația $x * x = m$ are o unică soluție $x \in A$ **3p**

(Alternativ, folosind izomorfismele f și g , ecuația este echivalentă cu $g(x * x) = g(m)$, sau, echivalent, $2 \cdot g(x) = g(m)$, cu soluția unică $x = f \left(\frac{1}{2} \cdot g(m) \right)$.)